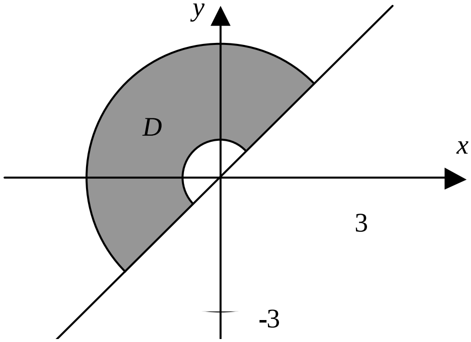


Figur 2.10 Området D från uppgift 2.8. D är utrymmet ovanför linjen $x = y$ och mellan två cirklar med centrum i origo, den ena med radie 1 och den andra med radie 3.

Exempel 2.8 *Polär substitution*

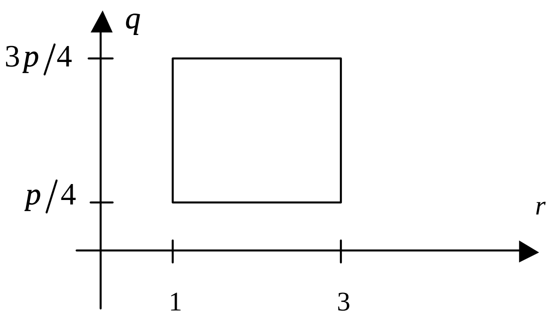
Beräkna

$$\iint_D y^2 dxdy$$

där $D = \{(x, y): 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, x \leq y\}$

Lösning

Uttrycket löses med polär substitution. Området D är en del av en cirkelring, där radien varierar mellan 1 och 3, och vinkeln kan vara mellan $\pi/4$ och $5\pi/4$ (villkoret att $x<y$).



Figur 2.11 Samma område som Figur 2.10, men i polära koordinater

Med polär substitution blir då integralen:

$$\iint_D y^2\,dxdy = \int_1^3 \int_{p/4}^{5p/4} r^2 \sin^2 q\, r\,dr\,dq =$$

$$= \left[\frac{r^4}{4}\right]_1^3 \cdot \int_{p/4}^{5p/4} \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2q\right)dq =$$

$$= \frac{81-1}{4} \cdot \frac{1}{2}\left[q - \frac{\sin 2q}{2}\right]_{p/4}^{5p/4} =$$

$$= 10 \cdot \left(\frac{5p}{4} - 0 - \left(\frac{p}{4} - 0\right)\right) = 10 \cdot p$$