Exempel 1.15 *PBU*

Finn en primitiv funktion till $\dfrac{x^3}{x^3+x^2+x+1}$.

Lösning

Polynomet i täljaren har samma grad som polynomet i nämnaren. Därför måste uttrycket polynomdivideras, och man får att:

$$\frac{x^3}{x^3+x^2+x+1}=1-\frac{x^2+x+1}{x^3+x^2+x+1}$$

Faktorisering av nämnaren sker genom att”gissa” att en rot är $x = -1$. Då kan $(x+1)$ faktoriseras ut:

$$x^3+x^2+x+1=(x+1)(x^2+1)$$

Därför skall det gå att skriva om:

$$\frac{x^2+x+1}{x^3+x^2+x+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Sätt uttrycket i högerledet på gemensamt bråkstreck:

$$\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{x^2(A+B)+x(B+C)+A+C}{x^3+x^2+x+1}$$

Identifiering ger ekvationssystemet:

$$\begin{cases} A \quad +B \qquad\quad =1 & (x^2) \\ \qquad\; B \quad +C =1 & (x) \\ A \qquad\quad\; +C =1 & (konst) \end{cases}$$

som har lösning $A = B = C = ½$. Därmed ges den primitiva funktionen av:

$$\int\frac{x^3}{x^3+x^2+x+1}dx=\int\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{x+1}{x^2+1}\right)\right)dx=$$

$$=x-\frac{1}{2}\left(\ln|x+1|+\int\left(\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx\right)=$$

$$=x-\frac{1}{2}\left(\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\arctan x\right)$$