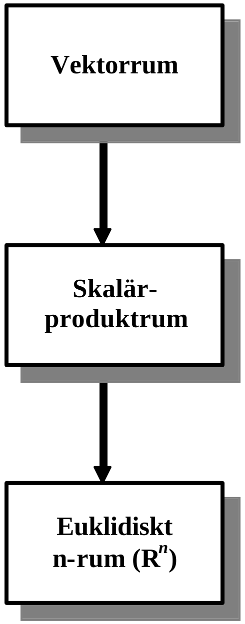
3 Linjära rum och avbildningar



Helt generaliserade vektorer.
Ex: $3\times 3-$matriser

Vektorrum med skalärprodukt.
Ex: $2\times 2-$matriser med skalärprodukt definierad enligt:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = $$
$$= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}$$

Vektorer med standardskalärprodukt:

$$(u_1,\ldots,u_n)\bullet(v_1,\ldots,v_n) = u_1v_1 + \ldots + u_nv_n$$

Ex: $\mathbf{R}, \mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3$, etc

Figur 3.1 Hierarkin från generella vektorer till de vanliga geometriska i $\mathbf{R}, \mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3$, etc.

3.1 Linjärt rum (vektorrum)

LinearSpace, Vector Space
Linjära rum är egentligen en generalisering av vektorbegreppet, och definieras som en mängd vektor där man

- definierat addition mellan vektorer
- definierat multiplikation mellan en vektor och en skalär
- där axiomen från Tabell 3.1 skall vara uppfyllda

M är ett linjärt rum om det för alla $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in M$, och för alla $a, b \in \mathbf{R}$ gäller att:	
Addition mellan två vektorer	
1. $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in M$	(sluten)
2. $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u}$	(kommutativ)
3. $\exists\, \mathbf{0} : \mathbf{u}+\mathbf{0} = \mathbf{u}$	(det existerar nollvektor)
4. $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = (\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$	(associativ)
5. $\exists\, -\mathbf{u} : \mathbf{u}+(-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$	(det existerar negation)
Multiplikation med skalär	
6. $a\cdot\mathbf{u} \in M$	(sluten)
7. $1\cdot\mathbf{u} = \mathbf{u}\cdot 1 = \mathbf{u}$	(det existerar etta)
8. $a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}$	(distributiv)
9. $(a+b)\mathbf{u} = a\mathbf{u}+b\mathbf{u}$	(distributiv)
10. $a(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = a\mathbf{u}+a\mathbf{v}$	(distributiv)

Tabell 3.1 Definition av linjärt rum.

(Linjärt) Underrum

Subspace
Om V är ett linjärt rum och dessutom en delmängd av ett linjärt rum U, så är V ett underrum.
Det är enkelt att kontrollera denna egenskap. Om det gäller att $V \subset U$ och att U är ett linjärt rum, så är det enda man behöver undersöka om V är slutet under multiplikation med skalär och under addition, dvs om det gäller att:

$$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,\ a \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}+\mathbf{v} \in V \text{ och } a\mathbf{u} \in V$$

Skalärprodukt (inre produkt)
Scalar Product, Inner Product
Associerar två vektorer i ett reellt vektorrum med ett reellt tal, och uppfyller axiomen i tabell 3.2. Längd är en central egenskap och definieras som:

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u}\bullet\mathbf{u}}$$

Mer kommentarer, framför allt om standardskalärprodukten, finns i avsnitt 1.

Standardskalärprodukt (Euklidisk skalärprodukt)
Standard Scalar Product, Euclidean Scalar Product
Definieras av att $\mathbf{u}+\mathbf{v} = (u_1+v_1,\ldots,u_n+v_n)$.